

Hoofdstuk 2

Opdracht 2.16

9, 14, 20, 27, 35, ..., 67, ... is geen rekenkundige rij.

Bijvoorbeeld: $14 - 9 = 5$ en $20 - 14 = 6$.

$-12, -9, -6, -3, 0, \dots$ is een rekenkundige rij. Vaste verschil $v = 3$.

2, 4, 6, 8, 10, 12, 10, 8, 6, 4, 2 is geen rekenkundige rij.

Bijvoorbeeld: $4 - 2 = 2$ en $10 - 12 = -2$.

Opdracht 2.17

4, 13, 22, 31, ... is een rekenkundige rij met $a = 4$ en $v = 9$.

De n -de term is $a + (n - 1) \cdot v = 4 + 9(n - 1)$

De 20^e term is $4 + 9 \cdot 19 = 175$

Opdracht 2.18

Stel de rij is $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$

$$a_2 = 12 \Rightarrow a + v = 12$$

$$a_7 = 36 \Rightarrow a + 6v = 36$$

Als de eerste vergelijking van de tweede vergelijking wordt afgetrokken, dan volgt:

$$5v = 24 \Rightarrow v = \frac{24}{5}$$

Substitutie in de eerste vergelijking geeft:

$$a + \frac{24}{5} = 12 \Rightarrow a = 12 - \frac{24}{5} = \frac{36}{5}$$

De vijfde term van de rij wordt gegeven door: $a_5 = a + 4v = \frac{36}{5} + 4 \cdot \frac{24}{5} = \frac{132}{5}$

De n -de term wordt gegeven door: $a_n = a + (n - 1)v = \frac{36}{5} + \frac{24}{5}(n - 1)$

Opdracht 2.19

In opdracht 2.17 is gegeven de rij 4, 13, 22, 31, ...

Dit is een rekenkundige rij met $a = 4$ en $v = 9$. Voor de som van de eerste 20 termen is $n = 20$.

$$\text{De som} = n \cdot a + \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n - 1) \cdot v = 20 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 19 \cdot 9 = 80 + 1710 = 1790$$

In opdracht 2.13 is gegeven de rij 1, 3, 5, 7, 9, ...

Dit is een rekenkundige rij met $a = 1$, $v = 2$. Voor de som van de eerste 10 termen is $n = 10$.

$$\text{De som} = n \cdot a + \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n - 1) \cdot v = 10 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 9 \cdot 2 = 10 + 90 = 100$$

In opdracht 2.9 is gegeven de rij 2, 5, 8, 11, 14, ..., 68, 71.

Dit is een rekenkundige rij met $a = 2$ en $v = 3$. Stel het aantal termen is n . Dan geldt:

$$a + (n - 1) \cdot v = 71 \Rightarrow 2 + 3(n - 1) = 71 \Rightarrow 3(n - 1) = 69 \Rightarrow n - 1 = 23 \Rightarrow n = 24$$

$$\text{De som} = n \cdot a + \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n - 1) \cdot v = 24 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 23 \cdot 3 = 48 + 828 = 876$$

Opdracht 2.23

Rekenkundige rij:

$$\begin{array}{cccccc} a, & a + v, & a + 2v, & \dots, & a + 39v \\ 1, & 2, & 3, & \dots, & 40 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} a + 39v = 840 \\ v = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow a + 39 \cdot 5 = 840 \Rightarrow a + 195 = 840 \Rightarrow a = 645$$

Opdracht 2.24

$$a = 645 \quad v = 5 \quad n = 40$$

$$\begin{aligned} \text{De som} &= n \cdot a + \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n - 1) \cdot v = 40 \cdot 645 + \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 39 \cdot 5 \\ &= 25800 + 3900 = 29700 \end{aligned}$$

Opdracht 2.25

a $1 + 5 + 9 + 13 + \dots + 1001$

Som van een rekenkundige rij met $a = 1$ en $v = 4$.
Stel het aantal termen is n . Nu geldt:

$$\begin{aligned} a + (n - 1)v &= 1001 \Rightarrow 1 + 4(n - 1) = 1001 \Rightarrow \\ 4(n - 1) &= 1000 \Rightarrow n - 1 = 250 \Rightarrow n = 251 \end{aligned}$$

De som is gelijk aan:

$$\begin{aligned} n \cdot a + \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n - 1) \cdot v &= 251 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 251 \cdot 250 \cdot 4 \\ &= 251 + 125500 = 125751 \end{aligned}$$

b $-2 - 7 - 12 - 17 - \dots - 507$

Som van een rekenkundige rij met $a = -2$, $v = 5$.
Stel aantal termen is n . Dan geldt:

$$a + (n - 1)v = -507 \Rightarrow -2 - 5(n - 1) = -507 \Rightarrow$$

$$-5(n - 1) = -505 \Rightarrow n - 1 = 101 \Rightarrow n = 102$$

$$\begin{aligned} \text{De som} &= n \cdot a + \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n - 1) \cdot v = 102 \cdot (-2) + \frac{1}{2} \cdot 102 \cdot 101 \cdot (-5) \\ &= -204 - 25755 = -25959 \end{aligned}$$

c $-10 - 6 - 2 + 2 + 6 + \dots + 114$

Som van een rekenkundige rij met $a = -10$, $v = 4$.
Stel aantal termen is n . Dan geldt:

$$\begin{aligned} a + (n - 1)v &= 114 \Rightarrow -10 + 4(n - 1) = 114 \Rightarrow \\ 4(n - 1) &= 124 \Rightarrow n - 1 = 31 \Rightarrow n = 32 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{De som} &= n \cdot a + \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n - 1) \cdot v = 32 \cdot (-10) + \frac{1}{2} \cdot 32 \cdot 31 \cdot 4 \\ &= -320 + 1984 = 1664 \end{aligned}$$

d $-2 - \frac{7}{5} - \frac{4}{5} - \frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \dots + 19$

Som van een rekenkundige rij met $a = -2$ en $v = \frac{3}{5}$.

Stel het aantal termen is n . Nu geldt:

$$\begin{aligned} a + (n - 1)v &= 19 \Rightarrow -2 + \frac{3}{5}(n - 1) = 19 \Rightarrow \\ \frac{3}{5}(n - 1) &= 21 \Rightarrow n - 1 = 35 \Rightarrow n = 36 \end{aligned}$$

$$\text{De som is gelijk aan: } 36 \cdot (-2) + \frac{1}{2} \cdot 36 \cdot 35 \cdot \frac{3}{5} = -72 + 378 = 306$$

e $\sum_{k=-3}^n (-1 + 4k) = -13 - 9 - 5 - 1 + 3 + \dots + (-1 + 4n)$

Het aantal termen in deze optelling is $n + 4$.

De som is gelijk aan:

$$\begin{aligned} (n + 4) \cdot (-13) + \frac{1}{2} \cdot (n + 4) \cdot (n + 3) \cdot 4 &= (n + 4)(-13 + 2(n + 3)) \\ &= (n + 4)(2n - 7) = 2n^2 + n - 28 \end{aligned}$$

Opdracht 2.26

a Jaarlijkse bedragen aan aflossing: $\frac{180000}{30} = 6000$ euro.

Stel $R(t)$ is het rentebedrag in jaar t , $t = 1, 2, 3, \dots, 30$. Nu geldt:

$$R(1) = 0,09 \cdot 180000 = 16200$$

$$R(2) = 0,09 \cdot (180\,000 - 6000) = 16\,200 - 540$$

$$R(3) = 0,09 \cdot (180\,000 - 2 \cdot 6000) = 16\,200 - 2 \cdot 540$$

enzovoort.

$$R(t) = 16\,200 - (t - 1) \cdot 540 \Rightarrow R(t) = 16\,200 - 540t + 540 \Rightarrow \\ R(t) = 16\,740 - 540t$$

b Bedrag = $6000 + R(25) = 6000 + 16\,740 - 540 \cdot 25 = 9\,240$

c De rentebedragen vormen een rekenkundige rij met $a = 16\,200$, $v = -540$ en $n = 30$.

$$\text{De som} = 30 \cdot 16\,200 + \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 29 \cdot (-540) = 486\,000 - 234\,900 = 251\,100$$

Opdracht 2.32

1, 4, 9, 16, 25, ... is geen meetkundige rij.

Bijvoorbeeld: $\frac{4}{1} = 4$ en $\frac{9}{4} = 2,25$.

De rij is een oneindige rij.

-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, ... is een meetkundige rij met reden -1.

De rij is een oneindige rij.

16, 8, 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ... is een meetkundige rij met reden $\frac{1}{2}$.

De rij is een oneindige rij.

3, 9, 27, ..., 2187, ..., 19681 is geen meetkundige rij.

Als je steeds maar met 3 blijft vermenigvuldigen kom je uit op 19683.

De rij is een eindige rij.

Opdracht 2.33

40, 12, 3.6, 1.08, 0.324, ...

Meetkundige rij met $a = 40$ en $r = 0.3$.

De 20^e term is $a \cdot r^{19} = 40 \cdot (0.3)^{19} \approx 4.649 \cdot 10^{-9}$

Opdracht 2.34

$$\left. \begin{array}{l} a_3 = 9 \Rightarrow a \cdot r^2 = 9 \\ a_6 = -243 \Rightarrow a \cdot r^5 = -243 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a \cdot r^5}{a \cdot r^2} = \frac{-243}{9} \Rightarrow r^3 = -27 \Rightarrow r = -3$$

$$a \cdot r^2 = 9 \Rightarrow a \cdot 9 = 9 \Rightarrow a = 1$$

De betreffende rij is de rij 1, -3, 9, -27, 81, -243, ...

Opdracht 2.45

Stel in jaar t zijn er M_t munten in omloop, waarbij M_t wordt uitgedrukt in miljoenen en waarbij $t = 1, 2, 3, 4, \dots$

Nu geldt:

$$M_1 = 10$$

$$M_2 = 10 + 0.95 \cdot 10$$

$$M_3 = 10 + 0.95 \cdot (10 + 0.95 \cdot 10) = 10 + 0.95 \cdot 10 + (0.95)^2 \cdot 10$$

$$\begin{aligned} M_4 &= 10 + 0.95 \cdot (10 + 0.95 \cdot 10 + (0.95)^2 \cdot 10) \\ &= 10 + 0.95 \cdot 10 + (0.95)^2 \cdot 10 + (0.95)^3 \cdot 10 \end{aligned}$$

enzovoort.

$$M_{16} = 10 + 0.95 \cdot 10 + (0.95)^2 \cdot 10 + \dots + (0.95)^{15} \cdot 10$$

Dit is de som van een meetkundige rij met $a = 10$, $r = 0.95$ en $n = 16$.

$$M_{16} = a \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r} = 10 \cdot \frac{1 - (0.95)^{16}}{1 - 0.95} = 200(1 - (0.95)^{16}) \approx 111.974666$$